OLASILIKVE İSTATİSTİK

Bir olayın olasılığı ve olasılık aksiyomları

Tanım: Bir deney, eşit olasılıklı N sonuç verirse ve bu sonuçların M tanesi bir A olayına uygun ise A olayının $P(A)$ ile gösterilen gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{Uygun\ sonuçların\ sayısı}{Örnek\ uzaydaki\ tüm\ sonuçların\ sayısı}$$

dır.

Örnek: Bir zar atıldığında çift sayı gelme olasılığı nedir?

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$N = 6$

A: " $Zar\ atıldığında\ üste\ çift\ sayı\ gelmesi\ durumu$ "

$A = \{2, 4, 6\}$

$M = 3$

$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

dir.

Olasılık Aksiyomları

Bir deney yapılsın ve örnek uzayı S olsun. S ‘deki bir A olayının $P(A)$ olasılığı ile ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır:

A1. $P(A) \geq 0$

A2. $P(S) = 1$

A3. S örnek uzayında sonlu yada sayılabilir sonsuzlukta ikişerli ayrık olaylar dizisi $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olsun. Bu durumda

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

dir.

Örnek. Hilesiz bir çift zar atılsın. Üste gelen rakamların toplamının 8 olma olasılığı kaçtır?

A: “ Üst yüze gelen rakamların toplamının 8 olması ”

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem. A_1 ve A_2 bir S örnek uzayında $A_1 \subset A_2$ olacak biçimde iki olay ise

$P(A_1) \leq P(A_2)$ dir.

Teorem. Herhangi bir $A \subset S$ olayı için $P(A) \leq 1$ ‘dir.

Teorem. A , S örnek uzayında herhangi bir olay olsun. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ dır.

Teorem. $P(\emptyset) = 0$ dır.

Teorem. A ve B bir S örnek uzayında iki olay olsun.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

SONUÇ: E_1 , E_2 , E_3 ; S örnek uzayında herhangi 3 olay ise

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Teorem. A_j 'ler bir S örnek uzayında olaylarsa, $(j = 1, 2, \dots, n)$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

eşitsizliği yazılır.

Örnek. Bir işyerinde çalışan 300 kişiden 200'ü evli, 100'ü bekardır. Evli olanların 150'si ve bekâr olanların 80'i üniversite mezunudur. Diğerleri ise ilk, orta ve lise mezunudur. Bu iş yerinden rasgele seçilen bir çalışanın

a) Evli ve üniversite mezunu olması

b) Evli veya üniversite mezunu olması olasılıklarını bulunuz?

	Evli	Bekâr	Toplam
Ünv. Mezunu	150	80	230
Ünv. Mezunu değil	?	?	
Toplam	200	100	300

Çözüm :

A : Seçilen kişinin evli olması

B : Seçilen kişinin bekar olması

C : Seçilen kişinin üniversite mezunu olması olsun.

a) $P(A \cap C) = 150/300 = 0.50$

b) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

$$= (200/300) + (230/300) - (150/300) = 0.93$$

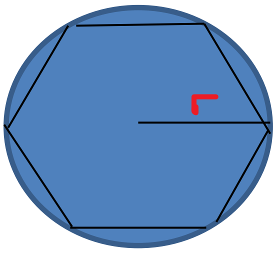
Sürekli örnek uzaylar ve Geometrik olasılık

Tanım: Varsayalım ki S sonlu uzunluğa, alana veya hacme sahip bir küme ve $A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde A kümesine bir olay denir ve bu olayın olasılığı

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{Uygun\ uzunluk}{Bütün\ uzunluk} = \frac{Uygun\ alan}{Bütün\ alan} = \frac{Uygun\ hacim}{Bütün\ hacim}$$

dir.

Örnek: r yarıçaplı bir çemberin içinde kenar uzunluğu r olan bir düzgün altıgen olduğunu varsayalım. Çember içinden rastgele seçilen bir noktanın düzgün altıgenin içinde olması olasılığı nedir?



A : " Çemberin içinden seçilen bir noktanın, düzgün altıgenin içine düşmesi "

$$P(A) = \frac{Düzgün\ altıgenin\ alanı}{Çemberin\ alanı} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2}{\pi r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

bulunur.

Örnek: Kenar uzunluğu 20 cm olan kare şeklinde bir tahtanın tam ortasına yarıçapı 5 cm olan bir daire hedef olarak çizilmiştir. Bir okçunun yaptığı atışın bu tahtaya denk geldiği durumda hedefi vurma olasılığı nedir?

A : "Okçunun yaptığı atışın hedefi(daireyi) vurması "

$$P(A) = \frac{Dairenin\ alanı}{Karenin\ alanı} = \frac{25\pi}{400} = \frac{\pi}{16}$$

Koşullu (Şartlı) Olasılık

A ve B , S örnek uzayında iki olay olsun. B verilmiş iken(biliniyorken) A olayının koşullu olasılığı $P(A/B)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) \neq 0$$

Benzer biçimde,

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$ dır.

Buradan,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

olur.

Örnek. Bir fabrikada üretilen parçalardan kusursuz 40 tanesi ve kusurlu 10 tanesi bir depoya konuyor. Seçilen yerine koyulmaksızın sırayla rasgele iki parça seçildiğinde her iki parçanın da kusurlu olması olasılığı nedir?

A : İlk seçilen parça kusurludur $\qquad P(A) = \frac{10}{50} = 1/5$

B : İkinci seçilen parça kusurludur $\qquad P(B/A) = 9/49$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{9}{49}\right) = 9/245$$

Örnek. Bir okuldaki öğrencilerin %45'i matematikten, %35'i istatistikten ve %25'i de hem matematik hem de istatistikten başarısızdır. Rasgele seçilen bir öğrencinin;

a) İstatistikten başarısız iken matematikten de başarısız olması olasılığını, (0.71)

b) Matematikten başarısızken istatistikten de başarısız olması olasılığını, (0.55)

c) Matematikten veya istatistikten başarısız olma olasılığını (0.55)

bulunuz?

A: Matematikten başarısız olan öğrenciler

B: İstatistikten başarısız olan öğrenciler

$P(A) = 0.45,\ P(B) = 0.35,\ P(A \cap B) = 0.25$

Teorem. (Koşullu olasılık için çarpma teoremi)

A_1 , A_2 , … , A_n olayları bir deneyin S örnek uzayında ise

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_\mathrm{n}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \, / \mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3 \, / \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \ldots \, \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{n} \, / \, \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{\mathrm{n}-1})$$

dir.

Örnek. 52'lik bir desteden yerine koyulmaksızın 3 kart çekiliyor. Bu üç kartın da as olması olasılığı nedir?

Çözüm.

$$A: \text{" Çekilen birinci kartın as olması"}$$

$$B: \text{" Çekilen ikinci kartın as olması"}$$

$$C: \text{" Çekilen üçüncü kartın as olması"}$$

$$P(A) = 4/52$$

$$P(B) = P(B \, / \, A) = 3/51$$

$$P(C) = P(C \, / \, A \cap \mathrm{B}) \; = 2/50$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \; \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B} \, /\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C} \, /\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right) = \frac{24}{132600}$$